TRIGONOMÉTRIE

I. MESURE D'UN ANGLE EN RADIAN

DÉFINITION Considérons un secteur angulaire et un cercle $\mathcal{C}$ ayant pour centre le sommet O de ce secteur. Soient A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les côtés du secteur. Notons $\overset{\frown}{AB}$ l'arc du cercle $\mathcal{C}$ intercepté par le secteur. La mesure en **radian** de l'angle $\widehat{AOB}$ est le rapport :

$$\frac{\text{longueur de l'arc } \overset{\frown}{AB}}{\text{rayon du cercle } \mathcal{C}}$$

ANGLES USUELS

Mesure en radian de l'angle plein : $\dfrac{2\pi r}{r} = \mathbf{2\pi}$

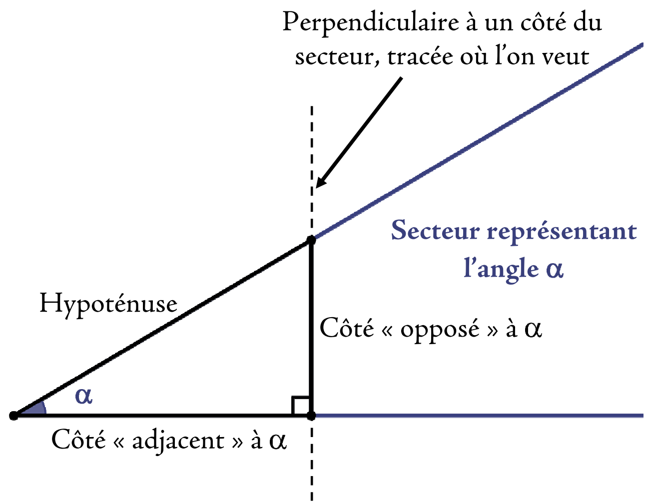
Mesure en radian de l'angle plat : $\dfrac{\pi r}{r} = \mathbf{\pi}$

Mesure en radian de l'angle droit : $\dfrac{\frac{1}{2}\pi r}{r} = \dfrac{\pi r}{2r} = \dfrac{\mathbf{\pi}}{\mathbf{2}}$

RÉSUMÉ $\boxed{\text{Angle plat } = \pi \text{ rad}}$

π est la mesure en radian de l'angle plat.

II. RAPPEL : LES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES AU COLLÈGE



DÉFINITION Dans un triangle rectangle, on considère un angle (autre que l'angle droit). On définit le sinus, le cosinus et la tangente de cet angle comme rapports de certains côtés du triangle rectangle :

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

« $\cos^2\alpha$ » signifie $(\cos\alpha)^2$

Valeurs exactes à connaître

mesure de α en degré	30°	45°	60°
mesure de α en radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

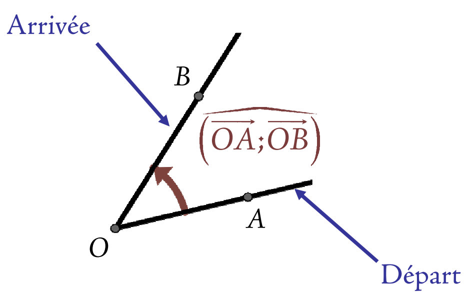
III. Angle de couple

Angle de secteur

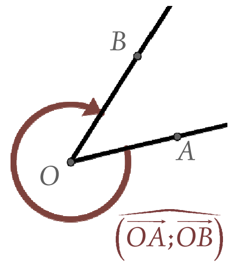
Dans le *secteur* angulaire les deux côtés ont un rôle similaire, en revanche, on distingue le secteur saillant du secteur rentrant. Deux *secteurs* définissent le même angle lorsqu'ils sont « superposables ».

Angle de couple

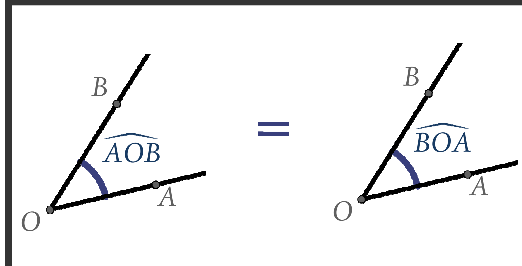
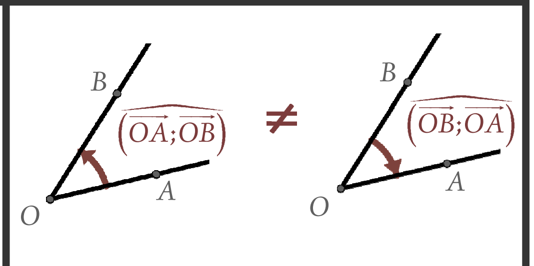
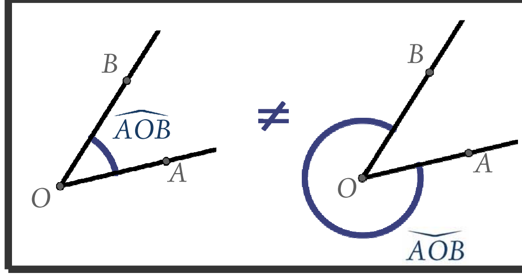
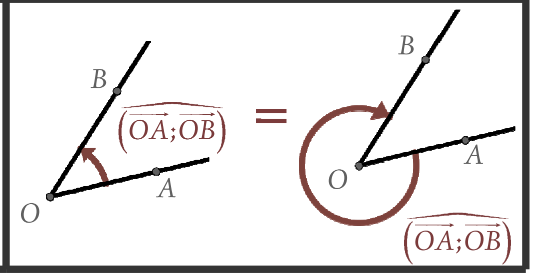
Dans le *couple* de demi-droites (ou de vecteurs) on ne choisit pas entre la partie saillante et la partie rentrante, mais on distingue les deux côtés (le numéro 1 et le numéro 2 ou si l'on préfère le départ et l'arrivée).



L'arc fléché sert à « numéroter » les côtés (1-départ ; 2-arrivée) et non à orienter ! De ce fait, il peut tourner dans l'autre sens et pourtant marquer le même angle :



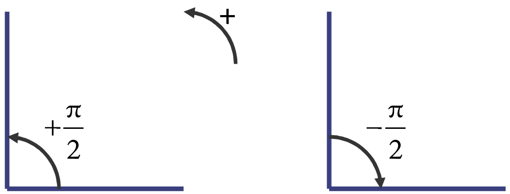
Récapitulatif

Angles de secteurs	**Angles de couples**
	
	

IV. Mesures orientées d'un angle de couple

Orientation

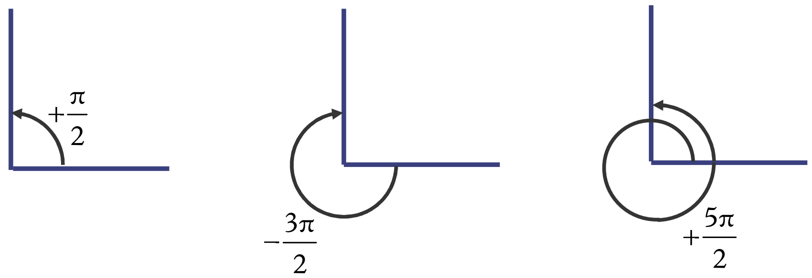
Pour *mesurer* les angles (de couple), on **oriente** tout d'abord le plan, c'est-à-dire qu'on privilégie l'un des deux sens de rotation, qui sera appelé le **sens trigonométrique**. Sur le papier, ce sens est traditionnellement représenté par le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les mesures des angles sont alors munies d'un signe : si l'on tourne dans le sens trigonométrique, la mesure est positive, sinon, elle est négative.



angle droit direct — angle droit indirect

Les mesures

Pour attribuer une mesure à l'angle droit direct, le plus simple est de tourner d'un quart de tour dans le sens positif, mais on peut aussi tourner de trois quarts de tours dans le sens négatif, ou de cinq quarts de tours dans le sens positif, etc.



Les mesures de l'angle droit direct sont :

$$\dots\ ;\ -\frac{7\pi}{2}\ ;\ -\frac{3\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{5\pi}{2}\ ;\ +\frac{9\pi}{2}\ ;\ \dots$$

Chaque angle a ainsi une infinité de **mesures**.

La mesure principale

La mesure d'un angle donné qui a la plus petite *valeur absolue* (celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$) est appelée **la mesure principale** de cet angle.

Congruence

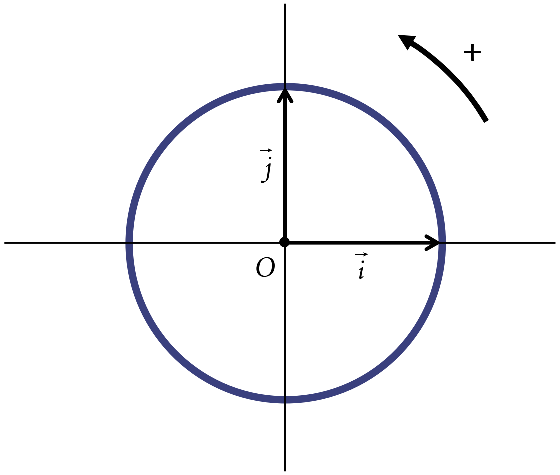
On passe d'une mesure à l'autre d'un même angle en ajoutant ou soustrayant un certain nombre de fois 2π. On dit qu'elles sont **congrues** entre elles, **modulo** 2π.

V. Cercle trigonométrique

Définition

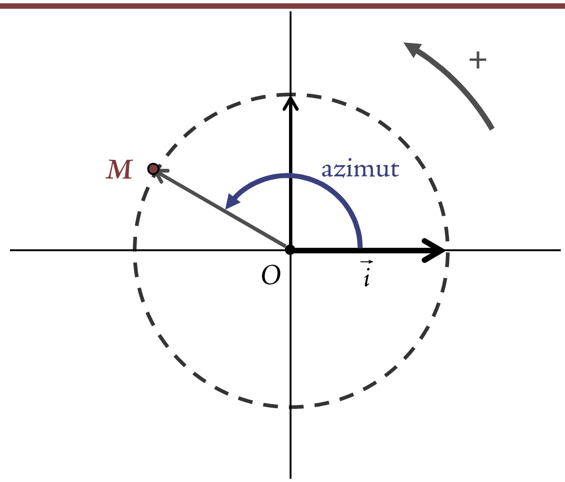
Dans un repère *orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ **direct**, le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1 et de centre O.

Un repère orthonormé est dit **direct** lorsque l'angle droit $\widehat{\left(\vec{i};\vec{j}\right)}$ est lui-même direct.



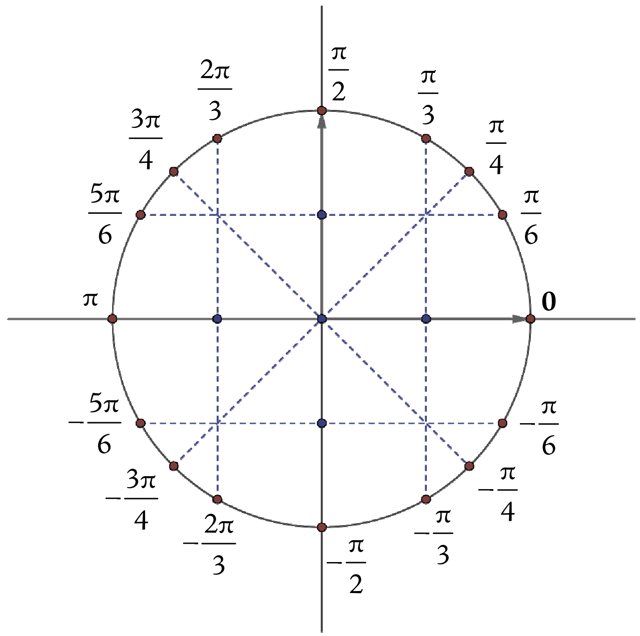
AZIMUT

> Dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique. À tout point M de $\mathcal{C}$, on fait correspondre l'angle $(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OM}})$. L'angle $(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OM}})$ s'appelle l'**azimut** du point M.



ANGLES USUELS

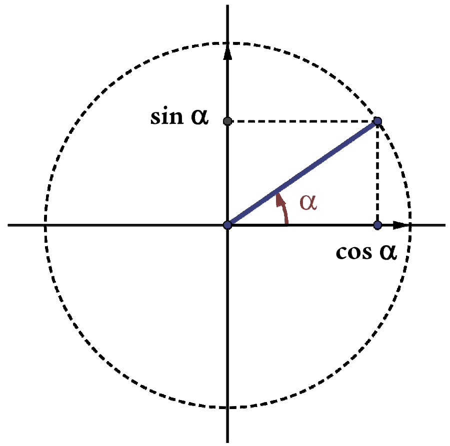
Voici les *mesures principales* (en radian) des angles les plus courants, représentées sur le cercle trigonométrique (les mesures sont écrites à côté du point du cercle qui représente l'angle) :



VI. LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES AU LYCÉE

DÉFINITION

> Dans un repère orthonormé direct :
> **cos** α et **sin** α sont les coordonnées du point d'« azimut » α sur le cercle trigonométrique. (Respectivement abscisse et ordonnée.)
> Lorsque $\cos\alpha \neq 0$, on pose : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

sin, *cos* et *tan* peuvent être vues comme des fonctions.

SINUSOÏDE

Voici les courbes de ces trois fonctions. Les courbes des fonction sinus et cosinus (dans un repère orthogonal) se nomment des **sinusoïdes**.